I21: Introduction à l'algorithmique

Cours 6: Algorithmes de recherche

Nicolas Méloni

Licence 1 (20117-2020)

Problème de la recherche

- But : trouver un élément donné dans un tableau d'éléments
- Deux cas de figure principaux :
  - les éléments sont rangés aléatoirement ;
  - les éléments sont triés.

Dans le premier cas on ne peut pas faire mieux que $\Theta(n)$ (n la taille du tableau). Si le tableau est trié on peut faire beaucoup mieux.

Problème de la recherche

Problème : Recherche d'un élément

Entrée : tableau d'entiers T de taille n et un nombre x.
Sortie : l'indice de x dans le tableau s'il s'y trouve ou 0 sinon.

Problème de la recherche

```
1  ALGORITHME RechercheSeq(T,x):
2  DONNEES
3     T: tableau d'entiers de taille n
4     x: entier
5  VARIABLES
6     i: entier
7  DEBUT
8     i ← 1
9     TQ i ⩽ n ET T[i]≠x FAIRE
10       i ← i+1
11    FTQ
12    SI i = n ALORS
13       RENVOYER 0
14    SINON
15       RENVOYER i
16 FIN
```

- Complexité :
  - Meilleur cas : $\check{C}(n) = \Theta(1)$
  - Pire cas : $\hat{C}(n) = \Theta(n)$
  - Cas général : $C(n) = O(n)$

Problème de la recherche

Problème : Recherche dans un tableau trié

Entrée : tableau d'entiers T de taille n contenant des nombres entiers triés dans l'ordre croissant et un nombre x.
Sortie : l'indice de x dans le tableau s'il s'y trouve ou 0 sinon.

Problème de la recherche

Idée générale :

- Séparer le tableau en deux moitiés ;
- comparer x avec l'élément au milieu du tableau ;
- déterminer à quelle moitié il appartient ;
- recommencer avec le sous tableau choisi.

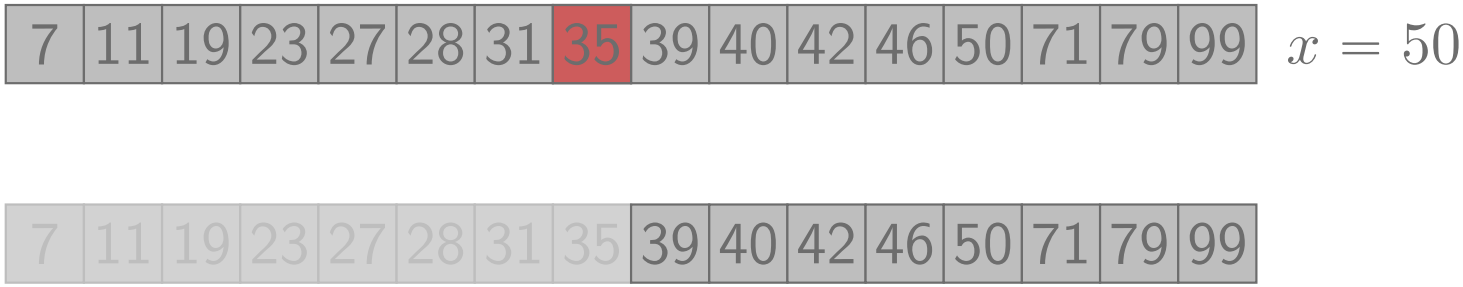
Recherche dichotomique

7	11	19	23	27	28	31	35	39	40	42	46	50	71	79	99

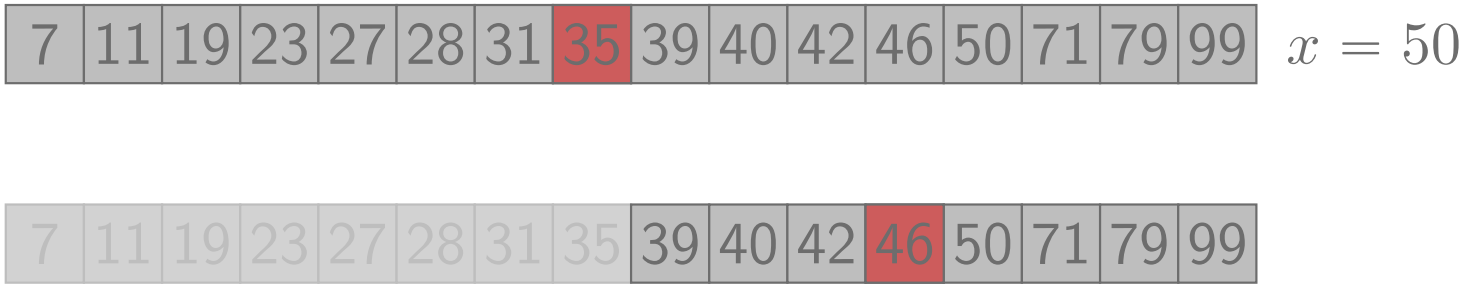
$x = 50$

Recherche dichotomique

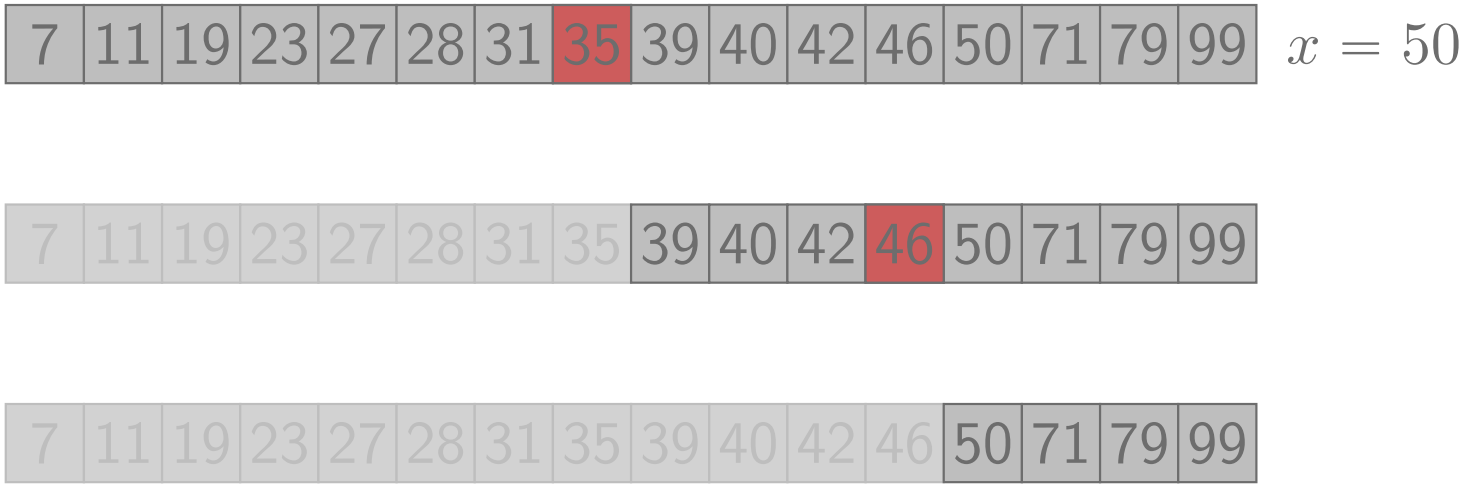
Recherche dichotomique



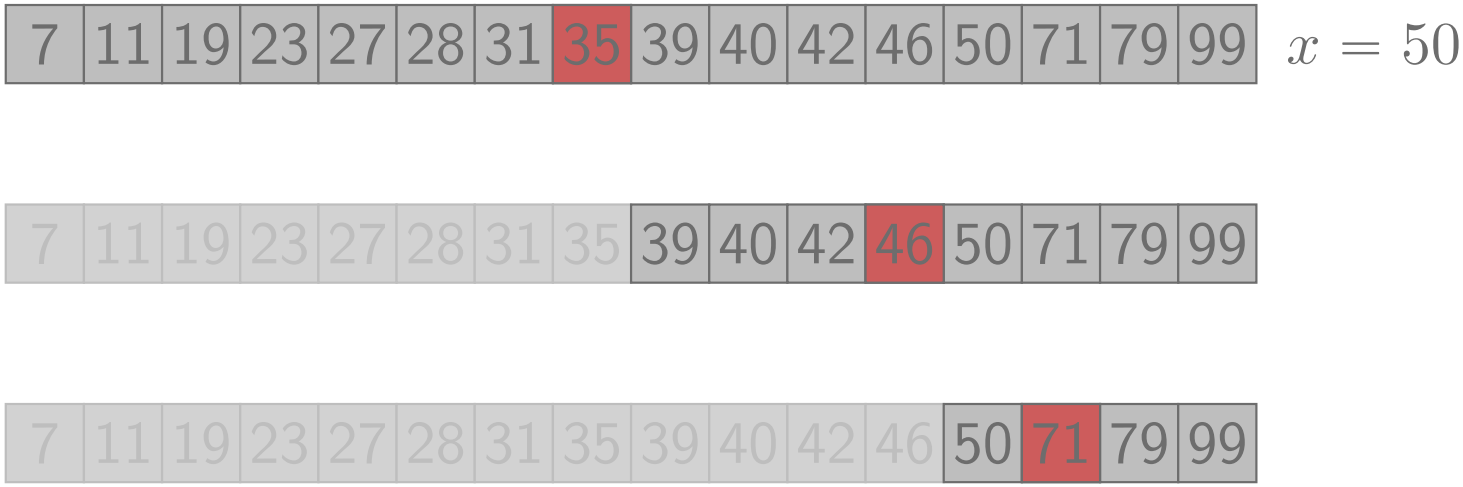
Recherche dichotomique



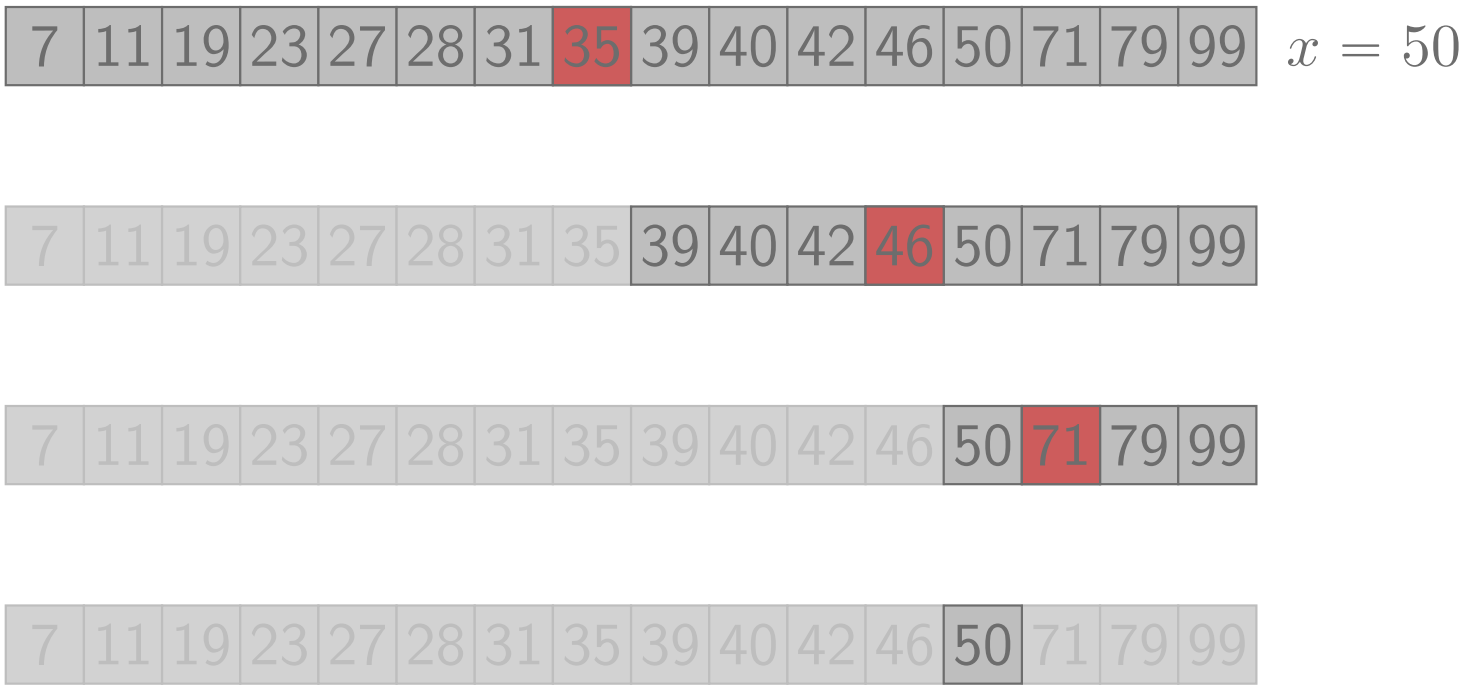
Recherche dichotomique



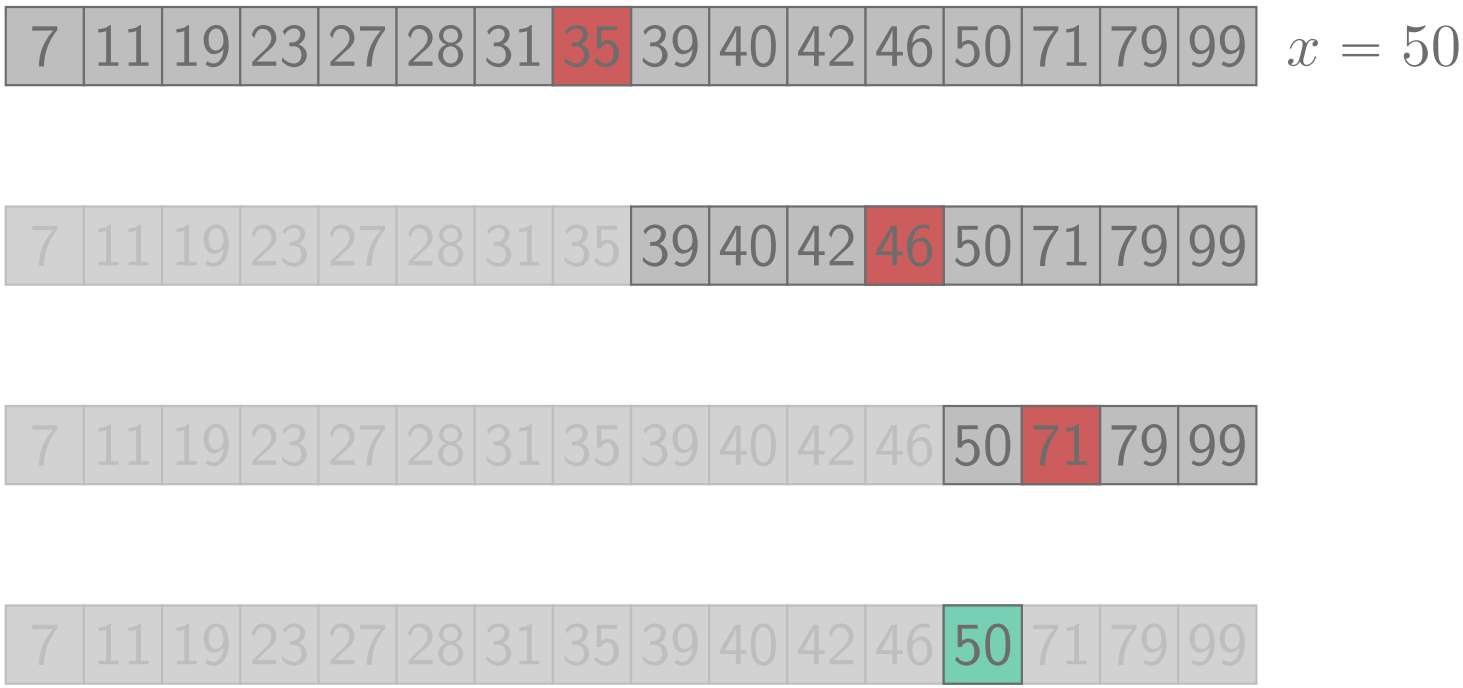
Recherche dichotomique



Recherche dichotomique



Recherche dichotomique



Recherche dichotomique

```
1  ALGORITHME Dichotomie(T,x):
2  DONNEES
3    T: tableau d'entiers tries
4       de taille n
5  VARIABLES
6    g,d,m: entiers
7  DEBUT
8    g,d←1,n
9    TQ g ⩽ d FAIRE
10     m←⌊(g+d)/2⌋
11     SI T[m] < x ALORS
12       g←m+1
13     SINON SI T[m] > x ALORS
14       d←m−1
15     SINON
16       RENVOYER m
17     FSI
18   FTQ
19   RENVOYER 0
20 FIN
```

Recherche dichotomique

- Complexité :
  - Meilleur cas :$\check{C}(n) = \Theta(1)$
  - Pire cas :$\widehat{C}(n) = \Theta(\log(n))$
  - Globale :$C(n) = O(\log(n))$

Recherche de pic

Définition

On appelle **pic** tout élément $T[i]$ d'un tableau T vérifiant

$$\begin{cases} T[i-1] \leqslant T[i] \geqslant T[i+1] \text{ si } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ T[i] \geqslant T[i+1] \text{ si } i = 1 \\ T[i-1] \leqslant T[i] \text{ si } i = n \end{cases}$$

Recherche de pic

Définition

On appelle **pic** tout élément $T[i]$ d'un tableau T vérifiant

$$\begin{cases} T[i-1] \leqslant T[i] \geqslant T[i+1] \text{ si } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ T[i] \geqslant T[i+1] \text{ si } i = 1 \\ T[i-1] \leqslant T[i] \text{ si } i = n \end{cases}$$

- Exemple : $T = [4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3]$ alors $T[1], T[6]$ et $T[9]$ sont des pics.

Recherche de pic

Définition

On appelle **pic** tout élément $T[i]$ d'un tableau T vérifiant

$$\begin{cases} T[i-1] \leqslant T[i] \geqslant T[i+1] \text{ si } 2 \leqslant i \leqslant n-1 \\ T[i] \geqslant T[i+1] \text{ si } i = 1 \\ T[i-1] \leqslant T[i] \text{ si } i = n \end{cases}$$

- Exemple : $T = [4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 3]$ alors $T[1], T[6]$ et $T[9]$ sont des pics.

Recherche de pic

Propriété

- Un tableau d'entiers contient toujours au moins un pic.

- Par récurrence on montre que si un sous tableau $T[1:i]$ ne contient pas de pic alors $T[1:i]$ est trié dans l'ordre croissant.

Recherche de pic

```
1  ALGORITHME PicSequentiel(T):
2  DONNEES
3    T: tableau d'entiers de taille n≥2
4  VARIABLE
5    i: entier
6  DEBUT
7    SI T[1] ≥ T[2] ALORS
8      RENVOYER 1
9    SI T[n] ≥ T[n-1] ALORS
10     RENVOYER n
11   i ← 2
12   TQ i ≤ n-1 FAIRE
13     SI T[i-1]≤T[i]≥T[i+1] ALORS
14       RENVOYER i
15     FSI
16     i ← i+1
17   FTQ
18 FIN
```

- Arrêt : la suite des valeurs prises par i est strictement croissante
- Validité : ($T[1 : i-1]$ ne contient pas de pic) est un invariant de boucle
- Complexité :
  - Meilleur cas : $\check{C}(n) = \Theta(1)$
  - Pire cas : $\hat{C}(n) = \Theta(n)$
  - Cas général : $C(n) = O(n)$

Recherche de pic

Approche par dichotomie

- on divise le tableau en deux parties ;
- on cherche un critère pour s'assurer qu'il existe un pic dans un des deux sous-tableaux.

Recherche de pic

Approche par dichotomie

- on divise le tableau en deux parties ;
- on cherche un critère pour s'assurer qu'il existe un pic dans un des deux sous-tableaux.

Posons $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ l'indice de milieu de talbeau, si $T[m]$ n'est pas un pic alors

Recherche de pic

Approche par dichotomie

- on divise le tableau en deux parties ;
- on cherche un critère pour s'assurer qu'il existe un pic dans un des deux sous-tableaux.

Posons $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ l'indice de milieu de talbeau, si $T[m]$ n'est pas un pic alors

- soit $T[m] < T[m+1]$ et il existe un pic dans $T[m+1 : n]$;

Recherche de pic

Approche par dichotomie

- on divise le tableau en deux parties ;
- on cherche un critère pour s'assurer qu'il existe un pic dans un des deux sous-tableaux.

Posons $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ l'indice de milieu de talbeau, si $T[m]$ n'est pas un pic alors

- soit $T[m] < T[m+1]$ et il existe un pic dans $T[m+1 : n]$;
- soit $T[m] < T[m-1]$ et il existe un pic dans $T[1 : m-1]$.

Recherche de pic

```
1  ALGORITHME PicDichotomie(T):
2  DONNEES
3    T: tableau d'entiers de taille n
4  VARIABLES
5
6  DEBUT
7    g,d←1,n
8    TQ g ⩽ d FAIRE
9      m← ⌊(g+d)/2⌋
10     SI m = 1 ou m = n ALORS
11       RENVOYER m
12     SINON SI T[m]<T[m+1] ALORS
13       g←m+1
14     SINON SI T[m]<T[m−1] ALORS
15       d←m−1
16     SINON
17       RENVOYER m
18   FTQ
19 FIN
```

Recherche de pic

- Complexité :
  - Meilleur cas : $\breve{C}(n) = \Theta(1)$
  - Pire cas : $\widehat{C}(n) = \Theta(\log(n))$
  - Cas général : $C(n) = O(\log(n))$